EXERCICE N°1 : 35' 5 points

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et dérivable sur] - ½ , ½].

x	-1/2		0		1/2
f '	‖	+	2π	-	0
f	‖ -∞	↗	-2	↘	-1

1) a) Montrer que f réalise une bijection de] - ½ , ½] sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en -2 et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}\left(-1 - \frac{k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{-1}\left(-1 - \frac{2}{n}\right) \leq u_n \leq f^{-1}\left(-1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

3) On donne $f(x) = \frac{-2}{1 + \sin(\pi x)}$, $x \in]-½ , ½[$. Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in]-\infty , -1[$.

EXERCICE N°2 : 35' 5 points

Sur la figure ci-contre, on donne (C) la représentation graphique d'une fonction h définie sur [-1 , 1[. T est la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

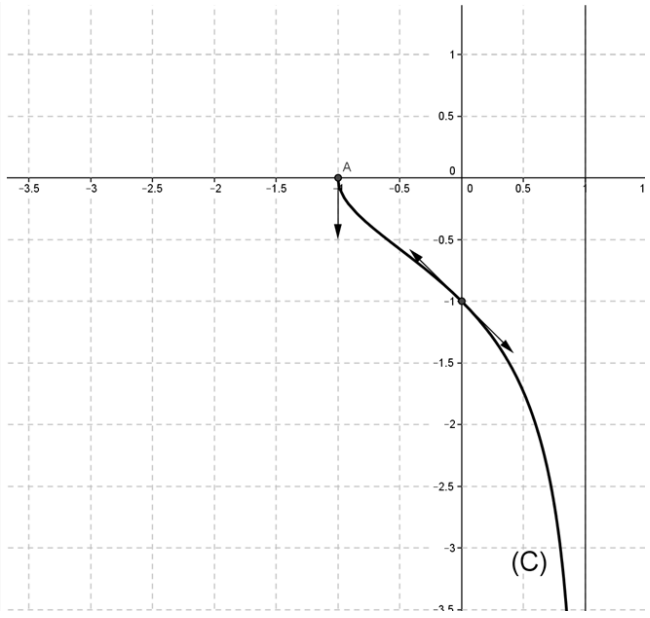
1) Par lecture graphique :

a) Déterminer h(0), h(-1), h'(0), $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{h(x) - h(-1)}{x + 1}$.

b) Dresser le tableau de variation de h et montrer que h réalise une bijection de [-1 , 1[sur un intervalle J a préciser.

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h^{-1}(x)$, $\left(h^{-1}\right)'(-1)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{h^{-1}(x) + 1}{x}$.

d) Tracer la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).



2) Soit la fonction f définie sur [- π/2 , π/2[par $f(x) = h(\sin x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur]-π/2 , π/2[et que f est une bijection de [-π/2 , π/2[sur]-∞ , 0].

b) On admet que $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$, Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur]-∞ , 0] et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.

EXERCICE N°3 : 35' 5 points

Soit f la fonction définie sur [-1 , 1[par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Etudier les variations de f. Déduire que f réalise une bijection de [-1,1[sur un intervalle J à préciser.

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. Construire les courbes de f et f^{-1}.

4) Soit g la fonction définie sur $]-\pi/2 , \pi/2[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi/2 , \pi/2[$ et montrer que $g'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $]-\pi/2 , \pi/2[$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(1/x)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = 0$.

EXERCICE N°4 : 35' 5 points

Soit f la fonction définie sur [0 , π[par $f(x) = 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de [0 , π[sur un intervalle J que l'on précisera. On pose $g = f^{-1}$. Calculer g(0).

2) Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$, $g'(x) = \frac{-2}{1+(1-x)^2}$.

3) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty , 1[$ par $\varphi(x) = g\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]-\infty , 1[$ et calculer φ'(x).

b) En déduire que pour $x \in]-\infty , 1[$, $g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - g(x)$.

4) On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g\left(\frac{1}{1-k}\right)$.

a) Montrer que $g\left(\frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{1}{2n}\right)$. Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

b) Montrer que $u_n + v_n = \pi$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.